

## MAI 2 1. a 2. cvičení - výpočet primitivní funkce (neurčitý integrál) 1.

(Najděte primitivní funkce na maximálních intervalech)

### 1. Jednoduché příklady na výpočet primitivní funkce :

a) (užití tabulky primitivních funkcí a výpočet integrálu násobku funkce a součtu funkcí)

$$\int (3e^x + \frac{1}{x}) dx ; \int (5\sqrt{x} + \frac{1}{\cos^2 x}) dx ; \int (\sqrt[3]{x} + x^5) dx ; \int \frac{x^3 - 1}{2x} dx ; \int \frac{(1-v)^2}{v\sqrt{v}} dv ;$$
$$\int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx ; \int \frac{x^4}{x^2 + 1} dx ; \int tg^2 u du .$$

b) Je-li  $\int f(x) dx = F(x) + C$  na intervalu  $I$ , pak, na odpovídajícím intervalu je

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C, a > 0 :$$

$$\int e^{-x} dx ; \int \cos(3x + 2) dx ; \int 4^x dx ;$$
$$\int (3x - 2)^6 dx ; \int \sqrt{3x - 2} dx ; \int \sqrt[3]{1 - 2x} dx ; \int \sqrt[3]{(1 - 2x)^2} dx ; \int \frac{1}{5 - x} dx ; \int \frac{1}{(3x + 1)^5} dx ;$$
$$\int \frac{1}{4 + x} dx ; \int \frac{1}{4 + x^2} dx ; \int \frac{1}{1 + 4x^2} dx ; \int \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx ; \int \frac{1}{x^2 + 4x + 7} dx ;$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - 9x}} dx ; \int \frac{1}{\sqrt{1 - 9x^2}} dx ; \int \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}} dx ;$$
$$\int \sin^2 x dx ; \int \cos^2 x dx .$$

### 3. Integrace „per partes“ :

Jsou-li funkce  $f$  a  $g$  spojité na intervalu  $(a, b)$ , a je-li  $F$  je primitivní funkce k  $f$  na  $(a, b)$  a  $G$  primitivní funkce ke  $g$  na  $(a, b)$ , potom na  $(a, b)$  platí:

$$\int f(x) \cdot G(x) dx = F(x) \cdot G(x) - \int F(x) \cdot g(x) dx$$

nebo jiná (často užívaná) „verze“ věty o integraci per partes:

Jsou-li funkce  $u'$  a  $v$  spojité na intervalu  $(a, b)$ , pak na  $(a, b)$  platí:

$$\int u'(x) \cdot v(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) dx$$

a)  $\int x \sin x dx ; \int x^2 \cos x dx ; \int x^3 \ln x dx ; \int x \ln^2 x dx ; \int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx ;$

b)  $\int \ln x dx ; \int \ln^2 x dx ; \int \frac{1}{x} \ln x dx ;$

c)  $\int \sin^2 x dx ; \int \cos^2 x dx ; \int e^x (\sin x + \cos x) dx ; \int \sqrt{1-x^2} dx ;$

d)  $\int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx ; \int \frac{1}{(x^2 + 1)^n} dx, n \in \mathbb{N}, n \geq 3 ;$

4. „Slepování“ primitivních funkcí:

a) najděte  $\int |x| dx$  ;  $\int \sqrt{x^6} dx$  ;  $\int |\sin x| dx$  v  $R$ ;

b) najděte v  $R$  primitivní funkci k funkci  $f$ , je-li

i)  $f(x)=0$  pro  $x \leq 0$  a  $f(x)=2x$  pro  $x > 0$ ;    ii)  $f(x)=x$  pro  $x \leq 0$  a  $f(x)=\sin x$  pro  $x > 0$ ;

iii)  $f(x)=-x$  pro  $x \leq 0$  a  $f(x)=x^2$  pro  $x > 0$ ;

5. Ukažte, daná funkce nemá v  $R$  funkci primitivní:

a)  $f(x)=\operatorname{sgn} x$  ; b)  $f(x)=x$  pro  $x \leq 0$  a  $f(x)=2x+1$  pro  $x > 0$ .

6. Ukažte, že funkce  $f: R \rightarrow R$ , definovaná jako  $f(x)=2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$  pro  $x \neq 0$ ,  $f(0)=0$ , má v  $R$  primitivní funkci, i když není spojitá v bodě  $x=0$ .

7. Ukažte užitím integrace per partes a „s pomocí první přednášky“, že  $\int \ln(\ln x) dx$  nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí.